Übungsaufgaben Zufallsgrößen und Erwartungswert

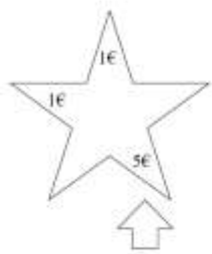
1. Es wird dir ein Spiel mit einer Münze angeboten. Du sollst dich zwischen verschiedenen Spielregeln entscheiden. Dabei möchtest du natürlich die Variante wählen, bei der dein Sieg am wahrscheinlichsten ist.
   Regeln: Münze wird 3 Mal geworfen
   a) Sieg bei mindestens 2x Kopf,
   b) Sieg bei genau 2x Kopf,
   c) Sieg bei höchstens 2x Kopf.
   Welche ist die für dich günstigste Gewinnregelung?

2. In einer Schatzkiste befinden sich Goldmünzen und Blechmünzen, deren Häufigkeiten unbekannt sind. Wenn man 2 Mal mit zurücklegen zieht, erhält man genau zwei Goldmünzen mit einer Wahrscheinlichkeit von 4%.
a) Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X „Anzahl der Goldmünzen“!
b) Gib eine mögliche Häufigkeit von Gold- und Blechmünzen an!
c) Kann man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung eindeutig ermitteln, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von genau einer Goldmünze von 30% gegeben ist? Begründe!

3. Es wird ein Spiel nach den folgenden Regeln gespielt:

   Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 €.
   Der Spieler setzt zuerst eine der Zahlen 1, 2, 3, ... , 6.
   Anschließend wirft er dreimal einen Würfel.
   Fällt die gesetzte Zahl nicht, ist der Einsatz verloren.
   Fällt die gesetzte Zahl einmal, so erhält er seinen Einsatz zurück.
   Fällt die gesetzte Zahl zweimal, so erhält er den doppelten Einsatz.
   Fällt die gesetzte Zahl dreimal, so erhält er den dreifachen Einsatz.

   Eine Zufallsgröße X soll den tatsächlichen Gewinn (Gewinn beim Spiel abzgl. Einsatz) beschreiben. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung! Gib an, ob es sich um ein faires Spiel handelt!



4. In der Abbildung ist eine Art Glücksrad abgebildet. Wenn der Pfeil auf ein Feld mit einem Geldbetrag zeigt, wird der Betrag ausgezahlt. Berechne den Einsatz pro Spiel, der nötig ist, damit es sich um ein faires Spiel handelt!

5. In 70% aller Fälle fällt ein beschmiertes Marmeladenbrot auf die belegte Seite.
   Berechne die zu erwartende Anzahl an Butterbroten, die auf die belegte Seite fallen, wenn man 4 Brote fallen lässt!

6. Bei einem fairen Spiel mit 2 Würfeln beträgt der Einsatz 3€.
   a) Man erhält bei einem Einer-Pasch einen Gewinn von a€.
   b) Man erhält bei einem Einer-Pasch einen Gewinn von 6€ und einen weiteren Gewinn in Höhe von a€, wenn man eine 1 und eine 2 geworfen hat.
   Bestimme die Höhe des Gewinns!

Lösungen

1. X...Anzahl Kopf
   $X \in \{0; 1; 2; 3\}$

x_i	$P(X = x_i)$
0	$0{,}5^3 = \frac{1}{8}$
1	$3 \cdot 0{,}5^3 = \frac{3}{8}$
2	$3 \cdot 0{,}5^3 = \frac{3}{8}$
3	$0{,}5^3 = \frac{1}{8}$

   a) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{2}$
   b) $P(X = 2) = \frac{3}{8}$
   c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{8}$
   Man würde sich deshalb für Sieg bei höchstens 2x Kopf entscheiden.

2.
   a) p...Wahrscheinlichkeit für eine Goldmünze
   $0{,}04 = p \cdot p = p^2 \Rightarrow p = 0{,}2 \Rightarrow$Wahrscheinlichkeit für Blechmünze ist 0,8
   $X \in \{0; 1; 2\}$

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,64
1	0,32
2	0,04

   b) z.B. 8 Blechmünzen und 2 Goldmünzen
   c) keine Eindeutige Lösung möglich:
   p...Wahrscheinlichkeit für Goldmünzen $\Rightarrow (1 - p)$...Wahrscheinlichkeit für Blechmünzen

$$0{,}3 = 2 \cdot p \cdot (1 - p)$$
$$0 = -2p^2 + 2p - 0{,}3$$
$$0 = p^2 - p + 0{,}15$$
$$p_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{0{,}1}$$
$$p_1 \approx 0{,}82$$
$$p_2 \approx 0{,}18$$

   Wenn gegeben ist, dass Goldmünzen seltener sind, dann wäre die Lösung eindeutig.

3. $X \in \{-2€; 0\,€; 2€; 4€\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
$-2€$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}58\ldots$	$\approx -1{,}16€$
0€	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}35\ldots$	$\approx 0€$
2€	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 0{,}07\ldots$	$\approx 0{,}14€$
4€	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 4{,}63 \cdot 10^{-3}$	$\approx 0{,}02€$
		$E(X) = 1{,}00€$

   Es ist kein faires Spiel, da der Einsatz 2€ beträgt, aber im Durchschnitt nur 1€ gewonnen werden kann.

4. X...auszuzahlender Betrag
   $X \in \{0€; 1€; 5€\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0€	$\frac{2}{5}$	0€

1€	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$€
5€	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$€
		$E(X) = 1{,}40€$

Der Einsatz muss 1,40€ betragen, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

5. Butterbrot wird 4 Mal fallen gelassen
X…Anzahl der Brote, die auf die beschmierte Seite fallen

$$X \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0	$0{,}3^4 = 8{,}1 \cdot 10^{-3}$	0
1	$4 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}0756$	0,0756
2	$6 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}2646$	0,5292
3	$4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}4116$	1,2348
4	$0{,}7^4 = 0{,}2401$	0,9604
		$E(X) = 2{,}8$

Die zu erwartende Anzahl an Butterbroten auf der beschmierten Seite beträgt rund 3 Brote.

6. X…auszuzahlender Betrag
   a) $X \in \{0€; a€\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0€	$\frac{35}{36}$	0€
a€	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}a$€
		$E(X) = \frac{1}{36}a$€

Damit es sich um ein faires Spiel handelt muss Einsatz gleich dem durchschnittlich auszuzahlenden Betrag sein, d.h.

$$3€ = \frac{1}{36}a\,€ \Rightarrow \quad a = 108$$

Bei einem Gewinn von 108€ bei einem Einer-Pasch und einem Einsatz von 3€ ist das Spiel fair.

   b) $X \in \{0€; 5€; a€\}$

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0€	$\frac{33}{36}$	0€
5€	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$€
a€	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}a$€
		$E(X) = \frac{2}{36}a€ + \frac{6}{36}€$

Für ein faires Spiel gilt: Einsatz=durchschnittlich auszuzahlender Betrag, d.h.

$$3€ = \frac{2}{36}a€ + \frac{6}{36}€ \Rightarrow a = 51$$

Bei einem Gewinn von 51€ beim Würfeln von einer Eins und einer Zwei ist das Spiel fair.