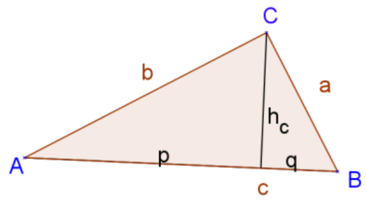
Lösung

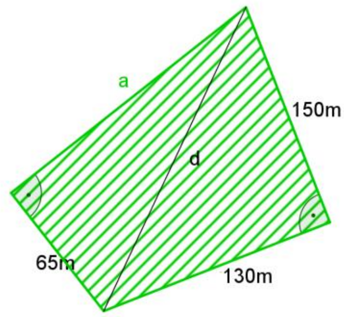
Zusatz

Rechtwinklige Dreiecke

1. Berechne die fehlenden Seitenlängen, Hypotenusenabschnitte, Winkel und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks!
   !! Es sind verschiedene Lösungswege möglich, bei denen man etwa die gleichen Lösungen erhält !!
   geg.: $a = 2\text{cm}$, $h_c = 1{,}4\text{cm}$, $\gamma = 90°$
   Lsg.: $q^2 = \sqrt{a^2 - h_c^2} \Rightarrow \underline{\underline{q = 1{,}43\text{cm}}}$
   $a^2 = q \cdot c \Rightarrow \underline{\underline{c = 2{,}80\text{cm}}}$
   $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 44{,}4°}}$
   IWS: $\underline{\underline{\alpha = 45{,}6°}}$
   $c = p + q \Rightarrow \underline{\underline{p = 1{,}37\text{cm}}}$
   $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow \underline{\underline{b = 1{,}96\text{cm}}}$



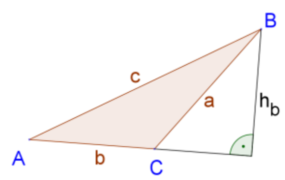
2. Der Tierpark in Moritzburg besitzt das abgebildete, viereckige Elchgehege mit 10 Elchen.
   !! Es sind verschiedene Lösungswege möglich, bei denen man etwa die gleichen Lösungen erhält !!
   a) Das Gehege soll mit einem neuen Zaun versehen werden. Ein Meter Zaun kostet 13,60€. Berechne die Kosten für den Neubau des Zauns.
   Lsg.: $d = \sqrt{(130\text{m})^2 + (150\text{m})^2} \Rightarrow \underline{\underline{d = 198{,}45\text{m}}}$
   $a = \sqrt{(198{,}5\text{m})^2 - (65\text{m})^2} \Rightarrow \underline{\underline{a = 187{,}50\text{m}}} \Rightarrow \underline{\underline{u = 532{,}5\text{m}}}$
   <u>Kosten: 7242€</u>
   b) Das für Tierschutz zuständige Veterinäramt schreibt vor, dass jedem Elch eine Fläche von 0,15ha zustehen muss. Weise nach, dass das Elchgehege diese Bedingung erfüllt.
   Lsg.: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 65\text{m} \cdot 187{,}50\text{m} = 6093{,}75\text{m}^2$ und $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 130\text{m} \cdot 150\text{m} = 9750\text{m}^2$
   $A_G = 15843{,}75m^2 \approx 1{,}58\text{ha} \Rightarrow$ <u>Fläche pro Elch etwa: 0,15ha</u>



Allgemeine Dreiecke

1. Gib an, mit welchen dieser Seitenlängen sich ein Dreieck konstruieren lässt! Begründe, weshalb die Kombinationen ausgeschlossen sind! 4cm, 6cm, 8cm, 10cm
   Ausgeschlossen ist die Konstruktion eines Dreiecks mit den Seitenlängen 4cm, 6cm und 10cm, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist: $6\text{cm} + 4\text{cm} \ngtr 10\text{cm}$

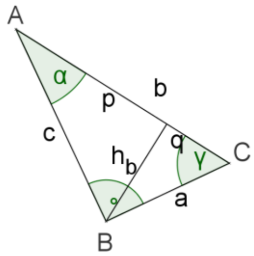
2. Von einem stumpfwinkligen Dreieck sind die Seiten $c = 8\text{cm}$ und $a = 5\text{cm}$, sowie der Winkel $\alpha = 35°$ gegeben. Berechne die Größe des Winkels γ.
   Lsg.: $\sin(\alpha) = \frac{h_b}{c} \Rightarrow \underline{\underline{h_b = 4{,}59\text{cm}}}$
   $\sin(180° - \gamma) = \frac{h_b}{a} \Rightarrow 180° - \gamma = 66{,}6° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 113{,}4°}}$



Lösung

Rechtwinklige Dreiecke

1. Kreuze an, welche der Beziehungen und Aussagen für das abgebildete rechtwinklige Dreieck gelten!



   a) Satz von Pythagoras: $\cancel{\square\, a^2 + b^2 = c^2}$ $\times\, \boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2}$ $\times\, \boldsymbol{p^2 + h_b^2 = c^2}$

   b) Höhensatz: $\cancel{\square\, h_b^2 = p \cdot b}$ $\cancel{\square\, h_b = p \cdot q}$ $\times\, \boldsymbol{h_b^2 = p \cdot q}$

   c) Kathetensatz: $\times\, \boldsymbol{a^2 = b \cdot q}$ $\cancel{\square\, b^2 = c \cdot p}$ $\cancel{\square\, c^2 = q \cdot b}$

   d) trigon. Beziehungen: $\times\, \boldsymbol{\sin(\alpha) = \frac{a}{b}}$ $\times\, \boldsymbol{\cos(\gamma) = \frac{q}{a}}$ $\times\, \boldsymbol{\tan(\gamma) = \frac{c}{a}}$

   e) Flächeninhalt: $\cancel{\square\, A = c \cdot a}$ $\times\, \boldsymbol{A = \frac{1}{2} a \cdot c}$ $\times\, \boldsymbol{A = \frac{b \cdot h_b}{2}}$

   f) Allgemeine Aussagen

   × Ein rechtwinkliges Dreieck lässt sich konstruieren, indem man die Seite b als Durchmesser eines Kreises verwendet und den Punkt B auf dem Kreisbogen wählt. Dann ist $\beta = 90°$.

   ~~□ Es gibt keine gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke.~~

   × Es gibt keine gleichseitig rechtwinkligen Dreiecke.

   × Wenn bei einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit $\gamma = 90°$.

   × Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse der Umkreisdurchmesser.

2. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel!

   !! Es sind verschiedene Lösungswege möglich, bei denen man etwa die gleichen Lösungen erhält !!

   a) $\alpha = 90°$, $a = 3\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$

   Lsg.:

   $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow\ c^2 = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow \underline{\underline{c = 2{,}24\text{cm}}}$

   $\sin(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 41{,}8°}}$

   $\gamma = 180° - \alpha - \beta \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 48{,}2°}}$

   b) $\gamma = 90°$, $\beta = 38°$, $a = 5\text{cm}$

   Lsg.:

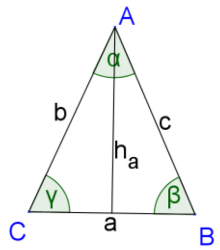
   $\cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos(\beta)} \Rightarrow \underline{\underline{c = 6{,}35\text{cm}}}$

   $\tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \tan(\beta) \cdot a \Rightarrow \underline{\underline{b = 3{,}91\text{cm}}}$

   $\alpha = 180° - \beta - \gamma \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°}}$

Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

1. Was versteht man unter einem gleichschenkligen/gleichseitigen Dreieck?
   Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck, bei dem zwei Dreiecksseiten gleich lang sind.
   Ein gleichseitiges Dreieck ist ein Dreieck, bei dem alle Dreiecksseiten gleich lang sind.



2. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel des abgebildeten gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis a!

   !! Es sind verschiedene Lösungswege möglich, bei denen man etwa die gleichen Lösungen erhält !!

   a) $h_a = 2\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$

   Lsg.:

   Gleichschenkliges Dreieck $\Rightarrow b = c \Rightarrow \underline{\underline{c = 3\text{cm}}}$

   $\sin(\gamma) = \frac{h_a}{b} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 41{,}8°}}$

   Basiswinkelsatz $\Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 41{,}8°}}$

   $\alpha = 180° - \beta - \gamma \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 96{,}4°}}$

   Gleichschenkliges Dreieck $\Rightarrow$ Höhe halbiert Basis

   $\Rightarrow b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 \Rightarrow a = 2 \cdot \sqrt{b^2 - h_a^2}$

   $\Rightarrow \underline{\underline{a = 4{,}47\text{cm}}}$

   b) $\alpha = 57°$, $a = 4\text{cm}$

   Lsg.:

   Gleichschenkliges Dreieck $\Rightarrow$ Höhe halbiert Winkel zwischen den Schenkeln und halbiert die Basis

   $\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \underline{\underline{b = 4{,}19\text{cm}}}$

   Gleichschenkliges Dreieck $\Rightarrow b = c \Rightarrow \underline{\underline{c = 4{,}19\text{cm}}}$

   Basiswinkelsatz & Innenwinkelsumme

   $\Rightarrow \gamma = \frac{180° - \alpha}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = \beta = 61{,}5°}}$

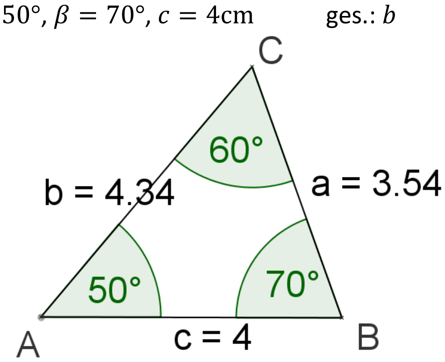
Lösung

Allgemeine Dreiecke

1. Verbinde die Sätze und Beziehungen für allgemeine Dreiecke mit den richtigen Bezeichnungen durch Linien!

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seitenlänge und zwei Winkeln übereinstimmen.	Dreiecksungleichung
Der größeren Dreiecksseite liegt immer der größere Winkel gegenüber.	Seite-Winkel-Beziehung
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seitenlängen übereinstimmen.	Innenwinkelsatz
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.	Hauptähnlichkeitssatz
Zwei Dreiecke sind ähnlich zueinander, wenn sie in der Größe zweier Winkel übereinstimmen.	Kongruenzsatz sss
Im Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte Seitenlänge, z.B. $a < b + c$	Kongruenzsatz wsw
Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt immer 180°.	Kongruenzsatz sws
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und dem der längeren Seite gegenüberliegendem Winkel übereinstimmen.	Kongruenzsatz SsW

2. Konstruiere das Dreieck mit den gegebenen Größen! Bestimme danach die gesuchte Größe durch Messen!
$\alpha = 50°, \beta = 70°, c = 4\text{cm}$ ges.: b



Seitenlängen in cm

$b = 4{,}34\text{cm}$

3. Bestimme rechnerisch die gesuchte Größe!
geg.: $\gamma = 75°$, b= 3cm, $c = 3{,}5\text{cm}$ ges.: β
Lsg.:
$\sin(\gamma) = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = \sin(\gamma) \cdot b \Rightarrow \underline{\underline{h_a = 2{,}90\text{cm}}}$
$\sin(\beta) = \frac{h_a}{c} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 56°}}$